



396

RELATÓRIOS COPPEAD Dezembro 2010

**UM ÍNDICE DE
MÍNIMA VARIÂNCIA
DE AÇÕES
BRASILEIRAS**

Cesar Thomé Neto
Ricardo P. Câmara Leal

Relatórios COPPEAD é uma publicação do Instituto COPPEAD de Administração da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ)

Editor

Prof. Mauricio Mittelman

Editoração

Lucilia Silva

Ficha Catalográfica

Ana Rita Mendonça de Moura

Thomé Neto, Cesar.

Um índice de mínima variância de ações brasileiras / Cesar Thomé Neto e Ricardo Pereira Câmara Leal. – Rio de Janeiro: UFRJ /COPPEAD, 2010.

27 p.; 27cm. – (Relatórios COPPEAD; 396)

ISBN 978-85-7508-083-2

ISSN 1518-3335

1. Finanças. I. Leal, Ricardo Pereira Câmara.
II. Título. IV. Série.

CDD – 332

Pedidos para Biblioteca:

Caixa Postal 68514 – Ilha do Fundão

21941-972 – Rio de Janeiro – RJ

Telefone: 21-2598-9837

Telefax: 21-2598-9835

e-mail: biblioteca@coppead.ufrj.br

Site: www.coppead.ufrj.br

Um Índice de Mínima Variância de Ações Brasileiras

Cesar Thomé Neto *
Ricardo P. Câmara Leal**

RESUMO

Este trabalho desenvolve um índice de carteiras de mínima variância global (MVP) para as ações mais líquidas do Brasil empregando a metodologia criada por Markowitz (1952). Tversky e Kahneman (1991) afirmam que perdas e desvantagens têm mais impacto sobre as preferências dos indivíduos do que ganhos e vantagens. Esta foi uma das motivações para se estudar o emprego mais amplo da MVP. Além disso, este índice deveria ser facilmente replicável e comparado aos principais índices de ações do País, podendo servir como opção de investimentos para pessoas físicas e instituições financeiras por meio de um *exchange-traded fund* ou como indicador de referência alternativo para fundos de investimentos em ações. Foram usados os preços das ações que constituíram as carteiras do Ibovespa de janeiro de 1998 a dezembro de 2008. Diversas carteiras foram criadas com diferentes limites máximos sobre os pesos de cada ação na busca da melhor metodologia. Testes de robustez foram desenvolvidos para avaliar a consistência do índice frente a mudanças na metodologia de cálculo e aos impactos de valores extremos sobre o seu desempenho final. O desempenho dos índices MVP foi comparado ao Ibovespa e a fundos de investimento de sucesso. Os resultados indicaram que a MVP sem limites sobre os pesos das ações não apresenta diferença significativa de desempenho em relação ao Ibovespa e aos fundos de investimentos analisados. A imposição de um peso máximo de dez por cento em cada ação tornou possível superar o Ibovespa, os fundos e uma carteira igualmente ponderada em testes fora da amostra. Estas restrições facilitam a replicação do MVP por investidores individuais.

Palavras-chave: carteira de mínima variância; desempenho de fundos; seleção de ativos

* Analista sênior da Foz do Brasil, Av. das Nações Unidas, 8501-31º andar, São Paulo, SP, 05425-070 (Tel. +55 11 3096-8000, e-mail: cesar.thome@yahoo.com).

**Professor Titular do Instituto COPPEAD de Administração da Universidade Federal do Rio de Janeiro

ABSTRACT

This paper develops an index of global minimum variance portfolio (MVP) for the most liquid stocks in Brazil using the methodology created by Markowitz (1952). Kahneman and Tversky (1991) argue that losses and disadvantages have greater impact on people's preferences than gains and advantages. This was one motivation for studying the wider use of the MVP. Moreover, this index should be easily replicated and compared to the major stock indexes in Brazil, serving as investment option for individuals and financial institutions through an exchange-traded fund or as alternative benchmark for stock mutual funds. We used the prices of stocks that were part of the Bovespa index from January 1998 to December 2008. Several portfolios were created with different constraints on the maximum stock weight. Robustness tests were conducted to evaluate the consistency of the MVP indexes relative to changes in the calculation methodology and the impact of extreme values. The performance of the MVP index was compared to the Bovespa index and to successful mutual funds. The unconstrained MVP shows no significant difference in performance over the Ibovespa and the mutual funds. However, the imposition of ten percent ceiling on the MVP weights for each asset made it possible to beat the Bovespa index and the funds in out of the sample tests. These constraints facilitate the replication of the MVP by individual investors.

Keywords: minimum variance portfolio; fund performance; portfolio selection

1 – INTRODUÇÃO

Investir em ações pode oferecer alto potencial de retorno, mas com risco elevado. Tversky e Kahneman (1991) admitem que a possibilidade de perdas influi mais nas preferências dos indivíduos do que o potencial de ganhos. Kahneman e Tversky (1979) também afirmam que as pessoas dão mais peso aos resultados certos do que aos resultados prováveis. Clarke *et al.* (2006) e Ang *et al.* (2006) concluíram que os ativos com mais volatilidade histórica ofereceram retornos menores do os menos voláteis. A aversão à perda dos investidores e os resultados ruins de investimentos de alta volatilidade certamente afasta muitos deles do mercado de ações. É possível que o investimento em ações por meio de um veículo que ofereça a menor volatilidade possível e que seja fácil de compreender seja bem aceito pelos investidores mais reticentes.

O Fundo de Investimento em Ações (FIA) é um veículo muito comum para investir em ações. Um fundo de ações pode balizar seu desempenho segundo um dos índices de ações mais comuns do país, como o Ibovespa ou o IBrX¹. Não há qualquer garantia que a carteira destes índices seja uma carteira eficiente no sentido de Markowitz (1952), isto é, uma carteira que ofereça o maior retorno esperado possível para seu nível de risco, medido pelo desvio-padrão dos retornos históricos das ações. A carteira de um índice pode ser formada segundo critérios de liquidez ou de valor de mercado das companhias e pode ser limitada a um número arbitrário de empresas. É possível, portanto, que haja uma carteira com o mesmo risco da carteira teórica do índice que ofereça maior retorno e que seja eficiente, pelo menos em relação ao conjunto de ações considerado.

A proposta deste trabalho é verificar se uma carteira eficiente, em relação a uma amostra limitada de ações, pode ser uma referência de desempenho superior aos índices tradicionais. Considerando o possível apetite dos investidores por veículos para investimento em ações com a menor volatilidade possível, a carteira eficiente que é candidata natural para análise é a de menor variância na fronteira eficiente (MVP de *global minimum variance portfolio*). Uma MVP pode servir tanto de referência de desempenho para gestores de fundos, na forma de um novo índice de ações, quanto podem-se criar produtos a serem oferecidos aos investidores baseados nesta carteira, como um *exchange traded fund* (ETF), um fundo que negocia como uma

¹ Respectivamente, Índice Bovespa, composto por cerca de 70 ações selecionadas e ponderadas a cada quadrimestre segundo sua liquidez, e Índice Brasil, composto por 100 ações selecionadas segundo sua liquidez e ponderadas pela quantidade de ações disponível para negociação.

ação em bolsa, tal como o bem conhecido PIBB (Papeis de Índice Brasil Bovespa) que busca resultados semelhantes ao desempenho do IBrX-50, similar ao IBrX, mas com somente 50 ações.

A análise realizada investigou se MVPs formadas segundo vários critérios simples apresentaram desempenho superior, relativo ao risco, ao do indicador mais usado no mercado nacional, o Ibovespa. As MVPs também foram comparadas a alguns fundos de ações de ótimo desempenho histórico e a uma carteira igualmente ponderada de ações. Os resultados sugerem que as MVP têm grande potencial para servir de base para índices de mercado, estratégias de investimento e produtos, como os ETF, e que as regras comumente empregadas pelos profissionais de mercado, como a limitação do valor dos pesos dos ativos nas carteiras e da amostra de ações a serem consideradas têm grande mérito.

2 – ANTECEDENTES NA LITERATURA

A construção de um índice que emprega a metodologia de Markowitz (1952) encontra respaldo na literatura. Constantinides e Malliaris (1995) afirmam que Markowitz (1952) conseguiu desenvolver uma metodologia racional para seleção de carteiras sob incerteza porque seu método vai além de reduzir o risco, já que preconiza a busca por ativos que apresentem relações de baixa covariância. Michaud (1989) admite que a teoria de seleção de carteiras por média-variância é um meio de racionalizar o valor da diversificação e apresenta muitos benefícios para os investidores. Entre eles, está um maior controle do risco da carteira pela inserção de restrições feitas pelos investidores na programação matemática do cálculo dos pesos dos ativos na carteira. O autor também ressalta que o modelo é flexível e permite que quaisquer expectativas de retornos sejam consideradas e que é possível analisar rapidamente grande quantidade de dados em pouco tempo. Clarke *et al.* (2006) destacam que estas análises podem ser feitas por meio de cálculo matricial, sem necessidade de utilizar simulação de Monte Carlo, reduzindo e simplificando o esforço computacional necessário.

A carteira de mínima variância global (MVP) possui características ímpares dentre as carteiras da fronteira eficiente. Clarke *et al.* (2006) afirmam que sua principal vantagem é não depender de estimativas de retornos futuros. A carteira é determinada exclusivamente em função da matriz de covariâncias entre os ativos e, por isso, é menos subjetiva do que as demais carteiras na fronteira eficiente. A

equação 1 apresenta a forma de se obter os pesos dos ativos da MVP e foi obtida de Constantinides e Malliaris (1995). \mathbf{W}_G é o vetor de pesos da MVP, Σ^{-1} é a matriz amostral de variâncias e covariâncias, $\mathbf{1}$ é um vetor coluna unitário e $\mathbf{1}^T$ seu transposto. Não há a necessidade de se ter estimativas para o retorno esperado de cada ativo. Naturalmente, é preciso empregar a média histórica amostral para se calcular as variâncias e covariâncias, mas isto não implica que estes valores são os retornos esperados pelo investidor.

$$\mathbf{W}_G = \frac{\Sigma^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}} \quad \text{Eq. 1}$$

A MVP também se destaca por ser independente da função utilidade do investidor que é diferente para cada indivíduo. Somente a MVP, em todos os casos, e a carteira de máximo retorno, composta unicamente pelo ativo de maior retorno esperado quando não se permitem vendas a descoberto, independem da função utilidade do investidor na fronteira eficiente. DeMiguel *et al.* (2009) destacam que a MVP se enquadra na estrutura geral da utilidade esperada de média-variância quando se supõe que todos os retornos esperados em todos os estados da natureza são iguais.

De fato, Jobson e Korkie (1981) empregam uma propriedade da estatística matemática derivada por W. James e C. Stein cuja aplicação ao problema de otimização de Markowitz é bastante simples. O estimador de James-Stein é a média das médias históricas dos retornos de cada ação quando não se pode afirmar que o retorno esperado de uma ação é realmente diferente do que o de outra ação qualquer. Jobson e Korkie (1981) afirmam que a carteira ótima é a MVP quando isto ocorre e os retornos esperados são reduzidos (encolhidos, *shrunk*) a um único número, a média das médias. Disatnik e Benninga (2007) concluem que os resultados obtidos com métodos mais simples de *shrinkage*, como o uso da MVP amostral sugerido por Jobson e Korkie (1981), não se distinguem de métodos mais complexos. Ledoit e Wolf (2004) empregam o modelo de correlação constante para sua versão de *shrinkage* em que a matriz de covariâncias amostral é combinada em certa proporção com uma matriz de covariâncias estimada empregando a correlação média de todas as correlações para calcular as novas covariâncias. Eles também apresentam algoritmos para determinar a constante de proporção para a combinação das duas matrizes e concluem que seu método apresenta vantagens claras sob métodos mais complexos de *shrinkage* e sobre o método clássico de Markowitz (1952). Ledoit e Wolf (2004) também concluem que quanto menor o número de ativos no problema de otimização, melhor o desempenho do método de *shrinkage*. Mendes e Leal (2005) apresentam sua proposta de *shrinkage* visando dar

mais robustez à matriz de covariâncias e afirmam que seu método apresenta vantagens sobre a otimização clássica de Markowitz (1952) ao comparar as carteiras MVP clássica e robusta.

Gohout e Specht (2007) demonstram que carteiras formadas a partir de premissas racionais que levam em consideração as relações entre os ativos tendem a superar os índices usuais de mercado uma vez que estes não são necessariamente carteiras eficientes. Os autores concluem que a carteira formada de acordo com as diretrizes de Markowitz (1952) superou o índice alemão DAX no período analisado. A MVP é, teoricamente, a carteira que oferece o menor risco para o investidor.

O número de ativos a ser manejado também é um fator importante, particularmente para o investidor individual ou para um fundo de investimentos pequeno ou de objetivo restrito ou, ainda, um clube de investimentos. Bloomfield *et al.* (1977) e Oliveira e De Paula (2008) afirmam que os custos de manutenção e gestão de uma carteira estão diretamente relacionados à quantidade de ativos da carteira, ao tamanho da amostra de ativos analisados pelo gestor e à sua frequência de atualização. Limitar o número de ativos e seus pesos na carteira pode ser um dispositivo eficaz para reduzir o custo de gestão. DeMiguel *et al.* (2009) apresentam evidências que favorecem a prática de arbitrar limites aos pesos dos ativos na carteira e também de restringir o número de ativos considerados.

Apesar dos benefícios aparentes, Michaud (1989) afirma que o modelo de média-variância é pouco aplicado na prática. O autor acredita que os investidores estão acostumados a tomar decisões informais e alerta que o motivo principal para que as instituições não o empreguem reside em problemas políticos internos. O uso dessa metodologia reduz o poder dos gestores e dos investidores mais seniores, além de demandar mudanças na estrutura da organização, principalmente nos setores de contabilidade e de controle de risco. Michaud (1989) reúne os motivos para a baixa aceitação do modelo entre os investidores em dois grupos. O primeiro é fruto da percepção dos investidores de que o benefício real proporcionado pelo método não justificaria o esforço necessário para implementá-lo. O segundo é a resistência à mudança por parte dos investidores.

Green e Hollifield (1992) ressaltam que as participações dos ativos individuais calculadas pelo modelo de média-variância não se aproximam de zero à medida que o número de ativos disponíveis aumenta. Alguns ativos permanecem na carteira com pesos que podem ser considerados excessivos. Black e Litterman (1991) afirmam que a inconsistência os pesos intuídos pelos investidores em uma diversificação adequada

e os pesos resultantes dos modelos de alocação de ativos é uma das maiores barreiras para sua implementação. Green e Hollifield (1992) afirmam que os praticantes suspeitam das alocações resultantes da aplicação do modelo de média-variância e implementam-no juntamente com diversas restrições quanto aos pesos.

Michaud (1989), Best e Grauer (1991) e Mendes e Leal (2005), entre outros, afirmam que pequenas mudanças nos dados de entrada para o cálculo dos retornos médios e da matriz de covariância podem causar mudanças significativas nos pesos dos ativos nas carteiras da fronteira eficiente. O modelo do Markowitz (1952) pressupõe que a covariância entre os ativos permanecerá estável. Clarke *et al.* (2006) confirmam que os ativos possuem variância e covariância relativamente estáveis e, por isso, razoavelmente previsíveis. No entanto, Bauer *et al.* (2004) duvidam do êxito das técnicas tradicionais de formação de carteiras em momentos de crise e instabilidade do mercado. Os autores afirmam que, nestas situações, a volatilidade e correlações tendem a aumentar e, portanto, propõem que se recalcule a ponderação das carteiras com a metodologia de média-variância sempre que o mercado apresentar indícios de crise. Entretanto, os autores reconhecem que a estratégia sugerida não apresentou vantagens significativas ao final de seu estudo. Leal e Mendes (2010) realizam um ajuste na matriz de covariâncias empregando uma medida de correlação ajustada pela dependência nas caudas da distribuição obtida por meio de cópulas. Seus resultados indicam que o método obtém melhores resultados que o método clássico de Markowitz apenas em alguns casos, quando a dependência de cauda é fraca ou moderada e não quando é grande, como acontece nas crises.

Michaud (1998) apresentou uma alternativa ao modelo de Markowitz (1952) por meio de re-amostragem com a técnica de *bootstrapping* em que diversas fronteiras eficientes são obtidas por meio de simulação e os pesos das carteiras para níveis selecionados de risco são obtidos dentro dos intervalos de confiança derivados da distribuição de pesos simulada. No entanto, há várias contestações ao método de Michaud (1998). Fletcher e Hillier (2001) afirmam que o desempenho de carteiras com pesos calculados pelo método de Michaud (1998) não é superior ao método clássico de Markowitz (1952). Handa e Tiwari (2006) asseveram que a incorporação da incerteza nos parâmetros de entrada por meio de método Bayesianos não melhora o desempenho das carteiras. Mendes e Leal (2010) criam um método de *bootstrapping* semi-paramétrico que se sai melhor do que o método proposto por Michaud (1998) em simulações. Harvey *et al.* (2008) empregam métodos Bayesianos

em simulações de alocações de carteiras de um período adiante e concluem que eles superam os métodos baseados em re-amostragem propostos por Michaud (1998).

Samuelson (1970), Rubinstein (1973) e Arditti e Levy (1975) defendem que momentos de ordem superior não podem ser desconsiderados. Harvey *et al.* (2010) acomodam momentos de ordem superior e métodos Bayesianos em sua análise e afirmam que obtêm resultados superiores aos procedimentos de re-amostragem uma vez que o procedimento de Michaud (1998) sempre acaba selecionando uma carteira sub-ótima.

DeMiguel *et al.* (2009) apresentam uma evidência devastadora para todos os modelos de alocação de carteiras, inclusive o original de Markowitz (1952). Eles testam 14 modelos diferentes em simulações fora da amostra e concluem que nenhum deles supera a diversificação ingênua feita com proporções de investimento igual em cada ativo (1/N). Eles também afirmam que seria necessária uma janela de estimação de 250 anos para que os modelos de média-variância e seus aprimoramentos superassem a estratégia 1/N quando se consideram 25 ações na carteira. O tamanho da janela passa para 500 anos com 50 ativos. Os resultados de DeMiguel *et al.* (2009), no mínimo, favorecem a visão muito comum entre os profissionais de mercado de imposição de limites para a participação dos ativos na carteira e para o total de ativos a ser analisado, além de restrições à venda a descoberto. Os modelos sujeitos a restrições apresentam resultados melhores com dados reais do que os sem restrições.

A conclusão desta revisão da literatura é que há méritos no emprego de carteiras que procuram níveis mais baixos de risco, como a MVP, assim como para restrições quanto ao número de ativos considerado e à proporção de cada ativo na carteira. A restrição a vendas a descoberto também parece estar sustentada pela evidência empírica e pode ser que o emprego de métodos robustos de estimativa da matriz de covariância apresentem vantagens sobre a estimativa clássica da MVP. Contudo, é possível que uma simples carteira com ponderação 1/N também se apresente como um bom indicador de desempenho.

3 – AMOSTRA E MÉTODO

Os valores de fechamento diários do Ibovespa, as cotações diárias médias e de fechamento das ações, com ajuste de proventos e dividendos no período de janeiro de 1998 até dezembro de 2008 foram obtidos da Economática®. A base de

notícias Bloomberg[®] forneceu as informações necessárias sobre as mudanças de códigos, fusões e cancelamentos dos ativos ao longo do período estudado. As carteiras quadrimestrais do Ibovespa foram obtidas no *website* da BM&FBovespa e por meio de mensagem enviada diretamente ao suporte da instituição. As ações consideradas na análise são as das empresas que faziam parte do Ibovespa e variam a cada quadrimestre segundo a regra de revisão de sua carteira teórica. Uma relação das ações que foram analisadas a cada quadrimestre encontra-se disponível com os autores. A base de dados Quantum Axis[®] forneceu o valor das cotas líquidas diárias dos fundos de investimento empregados na comparação com os índices de mínima variância. A escolha das ações mais líquidas é coerente com o objetivo do trabalho de obter um índice de mínima variância global que seja facilmente replicável e que sirva de alternativa de referência de desempenho aos índices de ações tradicionais. Esta escolha também é sustentada pela evidência recolhida na revisão da literatura de que deve-se limitar a amostra de ações analisadas para que os resultados dos modelos de otimização de média-variância sejam melhores.

Algumas empresas fecharam seu capital e outras foram objeto de fusões e aquisições no período analisado. As cotações de algumas ações que deixaram de negociar durante o período de estudo e que permaneceram na base de dados foram usadas até o dia em seus preços foram registrados para reduzir o viés de sobrevivência. No entanto, em diversos casos, a Economática[®] não mantém as cotações anteriores a essas modificações e, por isso, nesses casos o estudo considerará somente as ações que não sofreram alterações ou aqueles que somente mudaram o código do ativo negociado. Essa restrição reduz a quantidade de ativos disponíveis e, conseqüentemente, o número de combinações possíveis para carteira de mínima variância. Foram excluídas, também, as ações que não negociaram em pelo menos um dia durante o quadrimestre. Houve 192 exclusões de 75 ativos diferentes durante o período de análise, sendo que os períodos com mais exclusões foram os mais antigos, como esperado. A partir do segundo quadrimestre de 1998, o primeiro período considerado, e até o terceiro quadrimestre de 1999, foram excluídas, respectivamente, 32, 30, 24, 17 e 20 empresas. Uma lista detalhada das empresas excluídas está disponível com os autores.

As MVP foram construídas com as cotações diárias de fechamento de cada quadrimestre. Os pesos da primeira carteira foram obtidos com base nos preços do primeiro quadrimestre de 1998 para as ações da carteira teórica do Ibovespa, menos as exclusões, e vigoraram no segundo quadrimestre deste ano. A otimização de média-variância realizada não admitiu vendas a descoberto, para manter a

compatibilidade com os índices tradicionais de ações e a facilidade de replicação, e não considerou momentos de ordem superior. Os limites máximos de participação de um ativo na MVP foram de 10, 25, 50 e 75 por cento, além de uma carteira MVP sem este limite. Esses limites reduzirão a variabilidade dos pesos das ações quando do seu cálculo quadrimestral.

A MVP é definida com ações que são mantidas durante os quatro meses seguintes a cada ponderação. A quantidade teórica das ações na carteira não se altera, mas os pesos variam por influência dos preços de mercado. O peso obtido na otimização é empregado para calcular a quantidade teórica da ação na MVP, como é explicado mais adiante. Manter a quantidade teórica constante durante o período de análise do desempenho da carteira equivale a não rebalancear a carteira diariamente. O uso de cotações diárias já ajustadas para proventos e dividendos tornou desnecessário o rebalanceamento das quantidades teóricas nas datas destes eventos, mas equivale a este rebalanceamento. Este método foi adotado para que as MVPs analisadas equivalessem aos índices tradicionais, que mantêm suas quantidades teóricas constantes durante os períodos entre as mudanças de suas carteiras, e as ajustam para dividendos e proventos.

Uma vez obtida uma MVP seu desempenho será aferido no quadrimestre subsequente. A cotação do dia anterior de uma ação será repetida quando ela não for negociada no período de teste, indicando retorno nulo naquele dia. A MVP será rebalanceada dividindo-se o peso de uma ação que deixe de negociar permanentemente entre as ações que permaneçam na carteira. Este procedimento fará com que as ações com o peso máximo permitido ultrapassem o limite até que haja nova ponderação.

A matriz de covariâncias foi estimada na forma clássica com os retornos históricos e, alternativamente, por um método robusto. Ledoit e Wolf (2004) acreditam que a metodologia clássica de cálculo da matriz de covariância apresenta vantagens, como o baixo esforço computacional e a ausência de viés, e como principal desvantagem o erro de estimação elevado. Eles também alertam que o uso exclusivo de estimadores mais estruturados reduz o erro da estimativa, mas introduzem vieses, e concluem que os modelos híbridos, combinando a matriz de covariância e um estimador estruturado são capazes de proporcionar resultados melhores. Mendes e Leal (2005) adotam esta estratégia empregando duas matrizes de covariância que são ponderadas para formar uma matriz robusta que não seja muito distorcida pelos valores extremos da amostra. Estes autores adotam o estimador *Minimum Covariance Determinant* (MCD) de Rousseeuw (1984) juntamente

com uma variação da matriz de covariância histórica. As MVPs foram calculadas tanto na forma clássica de Markowitz (1952) quanto na forma sugerida por Mendes e Leal (2005) com base no estimador MCD com o auxílio do algoritmo FAST-MCD desenvolvido por Rousseeuw e Driessen (1999). A rotina computacional para MATLAB foi obtida no *website* do Departamento de Estatística Robusta da Katholieke Universiteit Leuven² (Universidade Católica da Lovaina). O ponto de ruptura de 75 por cento e os demais parâmetros usados seguiram as recomendações de Rousseeuw e Driessen (1999).

A equação 2 descreve como foram obtidas as quantidades teóricas que serviriam de base para o cálculo do desempenho do índice MVP durante um quadrimestre. Todas as MVP são índices que iniciam com 100 mil pontos. Este valor foi multiplicado pelo peso calculado para cada ação na MVP pelo método de otimização de média-variância e dividido pela cotação de fechamento da ação no dia anterior, o último dia do quadrimestre anterior, que foi usado para estimar os pesos, como se a ação tivesse sido comprada por este preço neste dia. Diariamente a quantidade teórica de cada ação calculada no primeiro dia do quadrimestre foi multiplicada pelo preço de fechamento da ação no dia como na equação 3. A soma da quantidade de cada ação multiplicada pelo respectivo preço forneceu o valor do índice para cada um dos dias do período de análise do desempenho. Assim como no Ibovespa, as MVPs não foram rebalanceadas diariamente. Esta metodologia faz com que o peso de cada ativo na carteira se altere diariamente de acordo com as oscilações do preço de fechamento de cada ação.

$$Q_{i,q} = \frac{MVP_{t-1} \times w_{i,q}}{P_{i,q}} \quad \text{Eq. 2}$$

$$MVP_t = \sum_{i=1}^N P_{i,t} \times Q_{i,q} \quad \text{Eq. 3}$$

Onde:

MVP_t = Índice MVP no dia t , sendo que $MVP_0 = 100.000$;

N = número total de ações na carteira teórica;

$P_{i,t}$ = último preço da ação i no dia t ;

² Acesso em 13 de setembro de 2010 <<http://wis.kuleuven.be/stat/robust.html>>

$Q_{i,q}$ = quantidade teórica da ação i no quadrimestre q em que está o dia t ;

$w_{i,q}$ = peso da ação na MVP no primeiro do quadrimestre q calculado com dados do quadrimestre anterior

Do segundo quadrimestre em diante, o valor do índice no final do quadrimestre anterior foi multiplicado pelos novos pesos de cada ação, referentes ao novo quadrimestre e calculados com base no quadrimestre anterior, e dividido pelo preço de cada ação no último dia do quadrimestre anterior para determinar a nova quantidade teórica de cada ação a vigor no novo quadrimestre. Este processo de cálculo da quantidade de cada ativo e do valor do índice se repetiu até o último dia do estudo. A partir do valor diário de cada um dos índices foi possível calcular seu retorno diário ($MVP_t / MVP_{t-1} - 1$) e acumulado ($MVP_t / MVP_1 - 1$).

O *value at risk* (VaR) histórico foi calculado a um nível de 99 por cento de significância como medida complementar ao desvio-padrão das MVPs. Este indicador consiste em empregar determinado quantil da distribuição empírica dos retornos para estimar a maior perda diária possível como 99 por cento de segurança. Este estudo usou o percentil 1 por cento. A equação 4 mostra a fórmula de cálculo. O VaR_α é a perda l que uma carteira pode ter cuja probabilidade de uma perda L excedê-la é menor ou igual a $(1 - \alpha)$. O VaR_α é um percentil da distribuição de perdas.

$$VaR_\alpha = \inf \{l \in \mathbb{R} : P(L > l) \leq 1 - \alpha\} \quad \text{Eq. 4}$$

$$VAR_\alpha = \inf \{l \notin \mathbb{R} : P(L > l) \leq 1 - \alpha\} \quad VAR_\alpha = \inf \{l \in \mathbb{R} : P(L > l) \leq 1 - \alpha\} \quad VAR_\alpha = \{P(L > l)\}$$

teste não paramétrico da soma das ordens de Wilcoxon foi usado para avaliar a diferença estatística entre as séries de retornos. Levine *et al.* (2005) asseguram que este teste é amplamente empregado e é provavelmente mais eficaz do que o teste t quando não se pode afirmar que os dados apresentam uma distribuição normal. Triola (2005) afirma que é preciso supor que a amostra analisada possui distribuição normal para usar o coeficiente de correlação de Pearson. O coeficiente de correlação de Spearman é uma estatística não paramétrica, que não requer suposições acerca da distribuição dos dados, e que a permite detectar relações não lineares e foi, portanto, usado como a medida de correlação deste estudo.

4 – RESULTADOS

4.1 Comparação das MVP com o Ibovespa

A Tabela 1 apresenta um resumo estatístico do desempenho dos índices no período total. A carteira com peso máximo de dez por cento por ação apresentou desvio-padrão menor do que a carteira sem limite para os pesos. Todas as MVP apresentaram desvio-padrão menor do que o do Ibovespa, como seria de se esperar. O VaR não paramétrico com 99 por cento de significância dos índices de mínima variância são semelhantes entre si e inferiores ao do Ibovespa. Todas as MVP superaram o retorno do Ibovespa. Quanto maior o limite sobre o peso da ação maior o retorno observado. A MVP com pesos limitados a dez por cento da carteira foi a que apresentou o melhor retorno e a melhor relação retorno sobre risco. O Ibovespa é o índice que apresenta a maior incidência de valores extremos. Não há uma tendência clara de comportamento das MVP quanto aos valores extremos em relação aos limites impostos sobre os pesos. A incidência de retornos diários negativos é similar entre os diversos índices. A Tabela 1 também mostra que as MVP são formadas por menos do que um terço do número de ações que o Ibovespa. A redução no número de ativos diminui os custos de gestão das carteiras. O número médio de ativos em cada MVP aproxima-se de 14 em todos os casos, próximo de 12 que é o número considerado ideal por Ceretta e Costa Jr. (2000). A lista com o número de ações de cada MVP em cada quadrimestre está disponível com os autores. O teste da soma das ordens de Wilcoxon indica que somente os retornos da MVP com pesos máximos de dez por cento são marginalmente diferentes dos retornos do Ibovespa. Todas as MVP apresentam correlação alta, positiva e significativa ao nível de 1 por cento com o Ibovespa.

A Figura 1 apresenta o retorno diário acumulado do Ibovespa e das cinco MVP para o período de 30 de abril de 1998 até 30 de dezembro de 2008. É possível perceber que, como esperado, todos os índices de mínima variância possuem comportamento semelhante, começando a se distanciar do Ibovespa a partir de 2001. A desvalorização da ação Embratel Participações ON (EBTP3) no final de 2004 prejudicou significativamente o desempenho das carteiras com restrições de 50 e 75 por cento e sem restrições porque constituía grande parte delas. A imposição de um peso máximo por ação preservou o desempenho das MVP com os limites de dez e 25

por cento. Todos os índices de mínima variância sofreram perdas significativas com os efeitos provenientes da crise do *subprime*.

A Tabela 2 apresenta a frequência com que cada um dos índices de mínima variância superou o Ibovespa. Os índices de mínima variância superaram o retorno do Ibovespa na maioria dos intervalos. As MVP superaram o Ibovespa mais frequentemente nos períodos mais longos. A MVP com limite de dez por cento de peso por ação superou o Ibovespa em 63,64 por cento dos quadrimestres. Todas as MVP apresentaram desvio-padrão menor que o do Ibovespa em pelo menos em 95,45 por cento dos períodos analisados. A MVP com limite de dez por cento nos pesos das ações apresentou desvio-padrão menor que o do Ibovespa em todos os períodos analisados.

4.2 Comparação da MVP com fundos de ações

Vinte e nove fundos de ações com gestão ativa foram selecionados para as comparações com a MVP com peso máximo de dez por cento. Em primeiro lugar foram considerados apenas os fundos classificados pela Associação Brasileira das Entidades dos Mercados Financeiros e de Capitais (Anbima) como “Ações Ibovespa Ativo” porque eles têm como objetivo superar o Ibovespa e não admitem alavancagem. Essa restrição limitou a escolha a 154 fundos. Em seguida, foram escolhidos os fundos que usavam o Ibovespa como referência de desempenho, restando 116 fundos. Em seguida foram eliminados os fundos criados depois de 30 de abril de 1998 para possibilitar comparações no período completo de análise. Este critério introduz um viés de sobrevivência que dificulta a aceitação da hipótese da MVP ser superior aos fundos, o que não representa um problema. A amostra ficou com 31 fundos, mas dois deles não apresentaram quotas durante todos os dias do período. A amostra final contou, então, com 29 fundos de ações. A relação destes fundos e algumas de suas características está disponível com os autores.

A amostra de fundos “Ações Ibovespa Ativo” apresenta características variadas. O maior patrimônio era de R\$ 145 milhões no final de 2008 e o menor de R\$ 35 milhões. As taxas de administração cobradas dos investidores variavam de zero a seis por cento ao ano. O fundo mais antigo em operação foi fundado em junho de 1969 e o mais recente operava desde janeiro de 1998. Uma taxa de administração de dois por cento ao ano foi imputada aos índices MVP para que a comparação com os fundos considerasse custos de transação. Essa taxa foi descontada diariamente.

O Ibovespa, é claro, não tem taxa de administração e, por isso, nove fundos da categoria "Ações Ibovespa Indexado" também foram selecionados para a comparação. Como alternativa, foi criada uma nova série de retornos do Ibovespa à qual foi imputada uma taxa de administração de dois por cento ao ano. Apenas dois fundos indexados apresentaram retorno acumulado superior ao do Ibovespa com taxa de administração e todos apresentaram desvio-padrão maior. O Ibovespa com taxa de administração de dois por cento ao ano é uma referência de desempenho mais difícil de ser superada do que os nove fundos desta categoria. A comparação, então, foi feita com esta série simulada em vez dos fundos reais. A correlação entre os fundos e o Ibovespa com taxa de administração é sempre maior do que 0,73. A relação destes nove fundos e algumas de suas características está disponível com os autores.

A Figura 2 mostra o retorno acumulado e o desvio-padrão dos retornos diários da MVP com pesos máximos de dez por cento, do Ibovespa com taxa de administração e dos 29 fundos da categoria "Ações Ibovespa Ativo" selecionados. A MVP com pesos máximos de dez por cento e taxa de administração de dois por cento ao ano apresenta o maior retorno acumulado e o menor desvio-padrão entre todos os ativos analisados. Alguns dos fundos selecionados oferecem rentabilidade inferior à do Ibovespa com taxa de administração, que é o ativo de maior desvio-padrão.

A Tabela 1 apresenta as estatísticas descritivas para a MVP com pesos máximos de dez por cento e taxa de administração de dois por cento ao ano e para os dois fundos que apresentaram os maiores retornos acumulados: o Fama Challenger FIC Ações (Fama) e o Itaú Private Expertise FIC Ações (Itaú). A MVP apresentou o maior retorno acumulado. Pode-se imputar uma taxa de administração de até 3,91 por cento ao ano à MVP que ela ainda supera o retorno acumulado do Fama. No caso do Itaú, pode-se imputar uma taxa de administração de até 4,91 por cento à MVP que ela ainda supera este fundo. O desvio-padrão da MVP é semelhante ao do Fama e menor que o do Itaú. O VaR da MVP é menor que os dos fundos. O retorno acumulado e médio diário mais elevado da MVP lhe garante destaque no indicador de retorno sobre risco. Os retornos diários do índice de mínima variância parecem menos dispersos do que os dos fundos. Os fundos apresentam maior proporção de valores extremos negativos, embora o percentual de retornos diários negativos seja ligeiramente maior para a MVP e sua mediana seja menor que a dos fundos.

A Tabela 3 apresenta a frequência com que a MVP com peso máximo de dez por cento por ação e taxa de administração de dois por cento ao ano e os fundos

"Itaú" e "Fama" superam o retorno médio e o desvio-padrão do índice Ibovespa em períodos de duração variados. Os fundos e a MVP apresentam frequências semelhantes e sempre maiores do que 50 por cento. O Ibovespa é superado com mais frequência quando a duração do período é maior. A MVP proporcionou retorno maior do que o do Ibovespa em 63,64 por cento dos períodos de 120 dias. A MVP apresentou desvio-padrão menor do que o do Ibovespa em todos os períodos, seguida de perto pelos fundos. Apesar das vantagens citadas, a estatística de Wilcoxon na Tabela 2 não permite afirmar que haja diferença significativa entre os retornos da MVP e dos fundos. A correlação entre os retornos da MVP e dos fundos é menor do que entre a MVP e o Ibovespa. Esta análise também foi feita para a MVP sem limite de pesos por ação e com taxa de administração de dois por cento ao ano a título de robustez. Os resultados são qualitativamente os mesmos e não são reportados.

4.3 Testes de Robustez

Os testes de robustez se concentrarão na MVP com pesos limitados a dez por cento porque foi o índice que apresentou melhores resultados. O Ibovespa apresenta mais valores extremos do que a MVP e é possível que eles sejam responsáveis pela diferença entre os dois índices. Foram excluídos os dez maiores e os dez menores retornos diários do Ibovespa, mas a exclusão não modificou qualitativamente os resultados obtidos anteriormente. A MVP com pesos máximos de dez por cento continuou superando o Ibovespa quanto ao retorno diário médio (0,0786 e 0,0364 por cento, respectivamente). Houve redução do desvio-padrão do Ibovespa para 0,0205, que ainda é bem maior que o da MVP selecionada. Os dias de retornos extremos excluídos do Ibovespa também foram excluídos da MVP. O teste de Wilcoxon aplicado aos retornos remanescentes ainda foi significativo a dez por cento ($Z_\alpha = 1,832$) e a correlação entre os índices permaneceu elevada (0,831). O *boxplot* das duas carteiras, que não foi incluído no artigo mas que está disponível com os autores, mostra que a MVP selecionada apresenta uma distribuição de retornos diários menos dispersa.

A MVP com pesos limitados a dez por cento foi recalculada com os preços médios de cada dia. Os resultados continuaram qualitativamente os mesmos. É possível que os preços médios do dia levassem a resultados diferentes porque as cotações de fechamento refletem somente um momento do dia e podem ser alteradas por um único investidor. O retorno diário médio variou de 0,0754 por cento com os

preços de fechamento para 0,0745 por cento com os preços médios. O desvio-padrão foi de 0,0165 com os preços de fechamento e passou para 0,0164 os preços médios. O teste de Wilcoxon para a diferença entre os retornos diários da MVP selecionada e o Ibovespa deixou de ser marginalmente significativo. A estatística Z_0 resultou em -1,370 e não foi mais possível afirmar que existisse diferença estatística entre a MVP selecionada e o Ibovespa. A correlação entre os índices aumentou para 0,963.

DeMiguel *et al.* (2009) afirmam que nenhuma forma de se calcular os pesos das carteiras eficientes supera uma alocação ingênua com pesos iguais em cada ativo ($1/N$). Um índice igualmente ponderado foi calculado com as mesmas ações que foram incluídas na MVP sem limites sobre os pesos. A Tabela 4 mostra que este índice igualmente ponderado apresenta retorno diário médio maior, e desvio-padrão dos retornos diários também maior do que os das MVP com pesos limitados a dez por cento e sem limites de peso. A relação retorno médio dividido pelo desvio-padrão do índice igualmente ponderado é essencialmente o mesmo que a da MVP com pesos limitados a dez por cento.

Não é possível afirmar que a carteira igualmente ponderada apresenta desempenho significativamente diferente das MVP selecionadas. As estatísticas de Wilcoxon foram de -0,023 para a MVP com pesos limitados a dez por cento e de -1,222 para a MVP sem limitação sobre os pesos. O coeficiente de correlação de Spearman é obviamente elevado entre estes índices, sendo de 0,963 e 0,926 para a MVP com pesos limitados a dez por cento e para a MVP sem limites sobre os pesos, respectivamente. A superioridade do retorno acumulado da carteira igualmente ponderada e sua relação retorno-risco igual à da MVP com pesos máximos de dez por cento favorece a hipótese de que alocações simples é superior. Contudo, não se deve esquecer que a carteira igualmente ponderada usada nesta análise partiu das ações selecionadas pela otimização de média-variância de Markowitz (1952) para compor a MVP sem limites máximos de peso e que sua relação retorno-risco é igual à da MVP com pesos máximos de dez por cento.

Uma nova MVP com pesos máximos de dez por cento foi obtida com base no método proposto por Mendes e Leal (2005) para o cálculo de uma matriz de covariância robusta. O retorno acumulado da MVP com pesos máximos de dez por cento calculada com a matriz de covariâncias amostral supera o retorno acumulado da mesma MVP calculada com a matriz de covariâncias robusta. O desvio-padrão e o VaR dos dois índices é similar. Os retornos diários da MVP robusta são significativamente menores do que os da MVP clássica, mas não são

significativamente diferentes dos retornos do Ibovespa. A estatística de Wilcoxon foi de - 2,634 e -1,505, respectivamente, para estes dois índices. Esse resultado difere do encontrado por Mendes e Leal (2005) porque aponta que a metodologia robusta não é superior. Essa divergência pode ser resultado da imposição de um peso máximo por ação e da restrição ao número de ações que compõem a MVP robusta, uma vez que aqueles autores não impõem essa restrição.

Em suma, os resultados que indicam a superioridade da MVP com pesos limitados a dez por cento não parecem ser devidos aos valores extremos, ao uso de preços de fechamento ou à forma como a matriz de covariâncias foi calculada. Esta MVP também apresenta resultados ligeiramente melhores do que os da carteira igualmente ponderada composta por ações selecionadas para compor a MVP sem limites sobre os pesos.

5 – CONCLUSÕES

A carteira de mínima variância global com limites máximos impostos sobre os pesos das ações foi capaz de apresentar retorno médio maior com desvio-padrão menor do que índice Ibovespa. Esta grande vantagem é atenuada pelos testes estatísticos não paramétricos que não indicam que os retornos destas carteiras são diferentes dos retornos do Ibovespa, com a exceção da carteira de mínima variância global com pesos limitados a dez por cento. Esta restrição garantiu uma alocação mais estável e uniforme para as ações nesta carteira em cada quadrimestre. Ela apresentou o maior retorno acumulado e o segundo menor desvio-padrão entre as carteiras de mínima variância global e se destacou na frequência com que superou os retornos do Ibovespa. Este resultado é consistente com a evidência apresentada por DeMiguel *et al.* (2009) de que limites sobre os pesos dos ativos nas carteiras e sobre o número total de ativos considerados são medidas eficazes. O número médio de ações na carteira de mínima variância global com pesos limitados a dez por cento é consistente com a recomendação para o número máximo de ações em uma carteira para que se diversifique bem o risco sugerido por Ceretta e Costa Jr. (2000) para o mercado brasileiro. Estas limitações também ajudam a reduzir o custo de gestão da carteira.

Os testes de robustez mostraram que a vantagem da carteira de mínima variância global com pesos limitados a dez por cento sobre o Ibovespa é significativa e consistente. Ela continuou a superar o Ibovespa estatisticamente mesmo quando os retornos atípicos foram removidos da amostra. O uso de preços médios diários no lugar dos preços de fechamento não alterou os resultados. O emprego de uma matriz de covariâncias robusta, em conjunto com o peso limitado em dez por cento, não melhorou os resultados.

A comparação entre a carteira de mínima variância global com pesos limitados a dez por cento e uma carteira com pesos iguais para as ações selecionadas para a carteira de mínima variância global sem limite sobre o peso das ações não favoreceu a carteira igualmente ponderada. DeMiguel *et al.* (2009) afirmam que a carteira igualmente ponderada supera todas as carteiras calculadas por meio de diversos métodos mais complexos, incluindo a própria carteira de mínima variância global sem limitar o peso de cada ativo. Os resultados deste estudo para a carteira de mínima variância global sem imposição de limites são consistentes com os resultados destes autores. No entanto, cabe destacar que a carteira de mínima variância global com pesos limitados a dez por cento superou a carteira igualmente ponderada. A carteira de mínima variância global com pesos limitados a dez por cento e com uma taxa de administração imputada de dois por cento ao ano também apresentou retorno maior e desvio-padrão menor do que dois fundos de ações selecionados entre os que apresentaram melhor relação retorno-risco. O teste não paramétrico realizado, todavia, não permitiu concluir que seus retornos são estatisticamente diferentes dos retornos dos fundos selecionados.

O número elevado de ações excluídas nos primeiros quadrimestres pode ter contribuído para que o desempenho dos índices de mínima variância não tenham se destacado do Ibovespa nos primeiros períodos do estudo. A exclusão de ativos reduz o número de combinações possíveis na carteira. É possível ter havido um viés de sobrevivência favorável aos índices de mínima variância se os ativos excluídos eram os de desempenho pior. Por outro lado, as carteiras de mínima variância global superaram o Ibovespa na maior parte dos 22 quadrimestres analisados enquanto os quadrimestres com um número maior de exclusões foram apenas cinco. Os fundos de ações que foram extintos durante o período analisado eram provavelmente os de baixo desempenho. Os fundos empregados nessas comparações, portanto, eram sobreviventes e, mesmo assim, a carteira de mínima variância global com pesos limitados a dez por cento não foi superada por eles, apresentando retorno acumulado maior.

As carteiras de mínima variância globais foram calculadas a cada quadrimestre, seguindo o procedimento do Ibovespa. Trabalhos futuros poderiam investigar se frequências maiores ou menores de recálculo dos pesos teriam influência sobre os resultados aqui apresentados. Atualizações mais frequentes permitiriam a inclusão mais rápida de ações provenientes de IPOs, por exemplo, mas elevariam o custo de gestão da carteira. A análise apresentada foi limitada às ações mais negociadas e que compõem o Ibovespa, tendo em mente a simplicidade. Uma extensão natural do estudo seria examinar o impacto da inclusão de ativos internacionais, ETFs que repliquem índices de ações de alguns dos maiores mercados globais, por exemplo, para investigar se é benéfica para os investidores a criação de mais uma referência de desempenho para o mercado.

Os resultados apresentados sugerem que criar um *exchange-traded fund* (ETF) baseado na carteira de mínima variância global com pesos limitados pode gerar um produto financeiro atraente. A estratégia também pode ser facilmente replicada por clubes de investimento e até por investidores individuais que se disponham a fazer o cálculo dos pesos a cada quadrimestre, um problema facilmente solucionável com uma planilha Excel®. Um índice de mínima variância também poderia ser desenvolvido e poderia ser empregado como referência de desempenho alternativa ao índice Ibovespa.

6 – REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANG, Andrew.; HODRICK, Robert, J.; XING, Yuhang; ZHANG, Xiaoyan. The cross-section of volatility and expected returns. **The Journal of Finance**, v. 61, n. 1, p. 259-299, 2006.

ARDITTI, Fred D.; LEVY, Haim. Portfolio efficiency analysis in three moments: The multi-period case. **The Journal of Finance**, v. 30, n. 3, p. 797-809, 1975.

BAUER, Rob.; HAERDEN, Roul; MOLENAAR, Roderick. Asset allocation in stable and unstable times. **Journal of Investing**, v. 13, n. 3, p.72-80, 2004.

BEST, Michael J.; GRAUER, Robert R. On the sensitivity of mean-variance efficient portfolios to changes in asset means: some analytical and computational results. **The Review of Financial Studies**, v. 4, n. 2, p. 315-342, 1991.

BLACK, Fischer.; LITTERMAN, Robert. Asset allocation: combining investors views with market equilibrium, **Journal of Fixed Income**, v. 1, n. 2 p. 7-18, 1991.

BLOOMFIELD, Ted.; LEFTWICH, Richard; LONG, John Jr. Portfolio strategies and performance. **Journal of Financial Economics**, v. 5, n. 2 p. 201-218, 1977.

CERETTA, Paulo S.; COSTA JUNIOR, Newton C. A. Quantas ações tornam um portfólio diversificado no mercado de capitais brasileiro? In: Costa, Jr, Newton C. A., Leal, Ricardo P. C., Lemgruber, Eduardo F. **Mercado de Capitais: Análise Empírica no Brasil, Coleção Coppead de Administração**. São Paulo: Atlas, 2000.

CLARKE, Roger.; DE SILVA, Harindra.; THORLEY, Steven. Minimum-variance portfolios in the U.S. equity market. **The Journal of Portfolio Management**, v. 33, n.1, p. 10-24, 2006.

CONSTANTINIDES, George M.; MALLIARIS, Anastasios G. Portfolio Theory. In: JARROW, Robert A.; MAKSIMOVIC, Vojislav; ZIEMBA, William T. (Orgs.) **Handbooks in operations research and management science: Finance**. North-Holland: Elsevier, v.9, 1995.

DEMIGUEL, Victor; GARLAPPI, Lorenzo; UPPAL, Raman. Optimal versus naive diversification: how inefficient is the 1/N portfolio strategy? **The Review of Financial Studies**, v. 22, n. 5, p. 1915-1953, 2009.

DISATNIK, David J.; BENNINGA, Simon. Shrinking the covariance matrix. **The Journal of Portfolio Management**. v. 33, n. 4, p. 55-63, 2007.

FLETCHER, Jonathan.; HILLIER, Joe. An examination of resampled portfolio efficiency. **Financial Analysts Journal**, v. 57, n. 5, p. 66-74, 2001.

GOHOUT, Wolfgang.; SPECHT, Katja. Mean-variance portfolios using Bayesian vector-autoregressive forecasts. **Statistical Papers**, v. 48, n. 3, p. 403-418, 2007.

GREEN, Richard C.; HOLLIFIELD, Burton. When will mean-variance efficient portfolios be well diversified? **The Journal of Finance**, v. 47, n. 5, p. 1785-1809, 1992.

KAHNEMAN, Daniel.; TVERSKY, Amos. Prospect theory: An analysis of decision under risk. **Econometrica**, v. 47, n. 2 p. 263–291, 1979.

HANDA, Puneet.; TIWARI, Ashish. Does stock return predictability imply improved asset allocation and performance? - Evidence from the US stock market (1954-2002). **The Journal of Business**, v. 79, n. 5, p. 2423-2468, 2006.

HARVEY, Campbell.; LIECHTY, John; LIECHTY, Merrill. **Journal of Investment Management**, v. 6, n. 1, p. 1-17, 2008.

HARVEY, Campbell.; LIECHTY, John.; LIECHTY, Merrill.; MULLER, Peter. Portfolio selection with higher moments. **Quantitative Finance**, v. 10, n. 5, p. 469-485, 2010.

JOBSON, J. D.; KORKIE, Bob. Putting Markowitz theory to work. **The Journal of Portfolio Management**, v. 7, n. 4, p. 70-74, 1981.

LEAL, Ricardo P. C.; MENDES, Beatriz V. M. **Incorporating tail dependence into Markowitz mean-variance model**. Rio de Janeiro, Brasil: Instituto Coppead de Administração/UFRJ, 20 p., 2010.

LEDOIT, Oliver; WOLF, Michael. Honey, I shrunk the sample covariance matrix. **The Journal of Portfolio Management**, v. 30, n. 4, p. 110-119, 2004.

LEVINE, David M.; STEPHAN, David F.; KREHBIEL, Timothy C.; BERENSON, Mark L. **Estatística: teoria e aplicações**. 3.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2005.

MARKOWITZ, Harry. Portfolio selection. **The Journal of Finance**, v. 7, n. 1, p. 77-91, 1952.

MENDES, Beatriz V. M.; LEAL, Ricardo P. C. Robust multivariate modeling in finance. **International Journal of Managerial Finance**, v. 1, n. 2, p. 95-107, 2005.

MENDES, Beatriz V. M.; LEAL, Ricardo P. C. Portfolio Management with Semi-Parametric Bootstrapping. **Journal of Risk Management in Financial Institutions**, v. 3, n. 2, p. 174-183, 2010.

MICHAUD, Richard O. The Markowitz optimization enigma: is "optimized" optimal?, **Financial Analysts Journal**, v. 45, n. 1 p.31-42, 1989.

MICHAUD, Richard O. **Efficient asset management: a practical guide to stock portfolio optimization and asset allocation**. Financial Management Association survey and synthesis series, Boston, Massachusetts: Harvard Business School Publishing, 1998.

OLIVEIRA, Fernando N.; DE PAULA, Eduardo L. Determinando o grau ótimo de diversificação para investidores usuários de Home Brokers. **Revista Brasileira de Finanças**, v. 6, n. 3, p. 437-461, 2008.

ROUSSEEUW, Peter J. Least median of squares regression. **Journal of the American Statistical Association**, v. 79, n. 338, p. 871-881, 1984.

ROUSSEEUW, Peter J.; VAN DRIESSEN, Katrien. A fast algorithm for the minimum covariance determinant estimator. **Technometrics**. v. 41, n. 3, p. 212-223, 1999.

RUBINSTEIN, Mark. The fundamental theorem of parameter preference security valuation. **The Journal of Financial and Quantitative Analysis**, v. 8, n. 1, p. 61-69, 1973.

SAMUELSON, Paula. The fundamental approximation of theorem of portfolio analysis in terms of means, variances and higher moments. **The Review of Economic Studies**. v. 37, n. 4, p. 537-542, 1970.

TRIOLA, Mario F. **Introdução à estatística**. Rio de Janeiro: LTC, 2005.

TVERSKY, Amos; KAHNEMAN, Daniel. Loss-aversion in riskless choice: a reference-dependent model. **The Quarterly Journal of Economics**, v. 106, n. 4, p. 1039-1061, 1991.

Tabela 1

Estatísticas descritivas para as carteiras de mínima variância global com pesos máximos variados, para o Ibovespa e para dois fundos de ações selecionados no período entre abril de 1998 e dezembro de 2008

	Peso Máximo por Ação na MVP								
	10%	10%*	25%	50%	75%	100%	Ibovespa	Itaú	Fama
Retorno acumulado (%)	632,85	555,76	465,56	383,70	317,65	315,53	221,57	443,71	482,23
Retorno diário médio (%)	0,0754	0,0712	0,0656	0,0597	0,0541	0,0539	0,0442	0,0641	0,0667
Desvio padrão	0,0165	0,0165	0,0165	0,0166	0,0167	0,0167	0,0236	0,0182	0,0167
VAR 99% (%)	4,5320	4,5501	4,4952	4,6755	4,6765	4,6765	6,2578	5,0990	5,0380
Ret. Médio Dia/Desv. Pad.	0,0457	0,0431	0,0399	0,0360	0,0324	0,0323	0,0188	0,0352	0,0398
Assimetria	- 0,0625	- 0,0661	- 0,1312	- 0,1469	- 0,2266	- 0,2305	1,1843	-0,0111	-0,0403
Curtose	4,8194	4,8196	4,1812	4,0917	4,5124	4,5393	19,7282	6,4985	7,3387
Mediana	0,1104	0,1055	0,0998	0,1021	0,1024	0,1024	0,1147	0,1187	0,1528
Retorno mínimo (%)	-11,11	-11,13	-10,49	-9,92	-10,79	-10,93	-15,83	-11,27	-11,05
Retorno máximo (%)	12,27	12,25	11,44	11,44	11,44	11,44	33,40	14,55	14,78
% retornos negativos (%)	47,56	47,60	46,65	46,65	46,39	46,39	47,82	46,31	44,99
% retornos > 2,5%	5,37	5,37	5,41	5,68	5,68	5,68	9,53	5,71	4,73
% retornos < -2,5%	4,96	4,96	4,50	4,92	5,03	5,03	10,40	6,17	5,11
% retornos > 5%	0,68	0,68	0,61	0,49	0,49	0,49	1,59	0,83	0,57
% retornos < -5%	0,68	0,68	0,79	0,83	0,83	0,83	1,74	1,06	0,98
Nº médio de ações carteira	15,88	15,88	13,09	12,63	12,63	12,63	56,00	n/d	n/d
Teste de Wilcoxon (Z_α)	1,789	n/a	-1,010	-0,684	-0,618	-0,617	n/a	-0,154†	-0,426†
Wilcoxon (p-valor)	0,072	n/a	0,312	0,494	0,537	0,537	n/a	0,877	0,670
Correlação (Spearman)	0,835	n/a	0,771	0,774	0,745	0,744	n/a	0,642†	0,563†

Nota: Os testes de Wilcoxon foram realizados com base em ordenações positivas (Ibovespa > MVP 10%). Todos os coeficientes de correlação são significativos ao nível de 1%. "n/a" quer dizer "não se aplica" e "n/d" não disponível. Para obter o coeficiente de assimetria relativo à curva normal deve-se subtrair 3. Neste caso, todos os coeficientes serão negativos, indicando assimetria negativa em relação à curva normal. * indica MVP com peso máximo de 10% e taxa de administração imputada de 2% ao ano. Os fundos de ações são o Itaú Private Expertise FIC Ações (Itaú) e o Fama Challenger FIC Ações (Fama). † indica que estas estatísticas foram calculadas em relação ao MVP com peso máximo de 10% e taxa de administração imputada de 2% ao ano.

Tabela 2

Percentual de períodos em que cada MVP supera o Ibovespa de abril de 1998 a dezembro de 2008

			Peso Máximo por Ação na MVP				
	Período	Amostras	10%	25%	50%	75%	100%
Retorno	1 dia	2643	51,08	50,59	50,47	50,40	50,40
	30 dias	88	54,55	48,86	48,86	47,73	47,73
	60 dias	44	59,09	59,09	61,36	61,36	61,36
	90 dias	29	62,07	58,62	58,62	58,62	58,62
	120 dias	22	63,64	54,55	54,55	54,55	54,55
Desvio-Padrão	30 dias	88	100,00	100,00	96,59	96,59	96,59
	60 dias	44	100,00	97,73	95,45	95,45	95,45
	90 dias	29	100,00	100,00	96,67	96,67	96,67
	120 dias	22	100,00	100,00	100,00	95,45	95,45

Tabela 3

Percentual de períodos em que a MVP com peso máximo de 10% por ação e taxa de administração de 2% ao ano e os fundos de ações Itaú Private Expertise FIC Ações (Itaú) e Fama Challenger FIC Ações (Fama) superam o Ibovespa de abril de 1998 a dezembro de 2008

	Período	Amostras	10%	Itaú	Fama
Retorno	1 dia	2643	51,19	53,08	50,81
	30 dias	88	54,55	51,14	56,82
	60 dias	44	59,09	50,00	68,18
	90 dias	29	62,07	58,62	65,52
	120 dias	22	63,64	59,09	59,09
Desvio-Padrão	30 dias	88	100,00	100,00	93,18
	60 dias	44	100,00	97,73	93,18
	90 dias	29	100,00	100,00	96,55
	120 dias	22	100,00	100,00	100,00

Tabela 4

Estatísticas descritivas para as MVP com peso máximo de 10% (MVP 10%), sem limites sobre os pesos (MVP 100%), uma carteira igualmente ponderada com as mesmas ações da MVP 100% (1/N) e a MVP com peso máximo de 10% estimada com uma matriz de covariâncias robusta (MVP 10% R)

	MVP 10%	MVP 100%	1/N	MVP 10% R
Retorno Acumulado (%)	632,85	315,53	713,47	445,22
Retorno diário médio (%)	0,0754	0,0539	0,0793	0,0642
Desvio-padrão	0,0165	0,0167	0,0173	0,0164
VaR 99% (%)	4,5320	4,6765	4,7673	4,4637
Ret. Méd. Dia/Desv. Pad.	0,0457	0,0323	0,0458	0,0390

Figura 1

Retorno acumulado para o Ibovespa e carteiras de mínima variância com diversos pesos máximos por ativo de abril de 1998 a dezembro de 2008

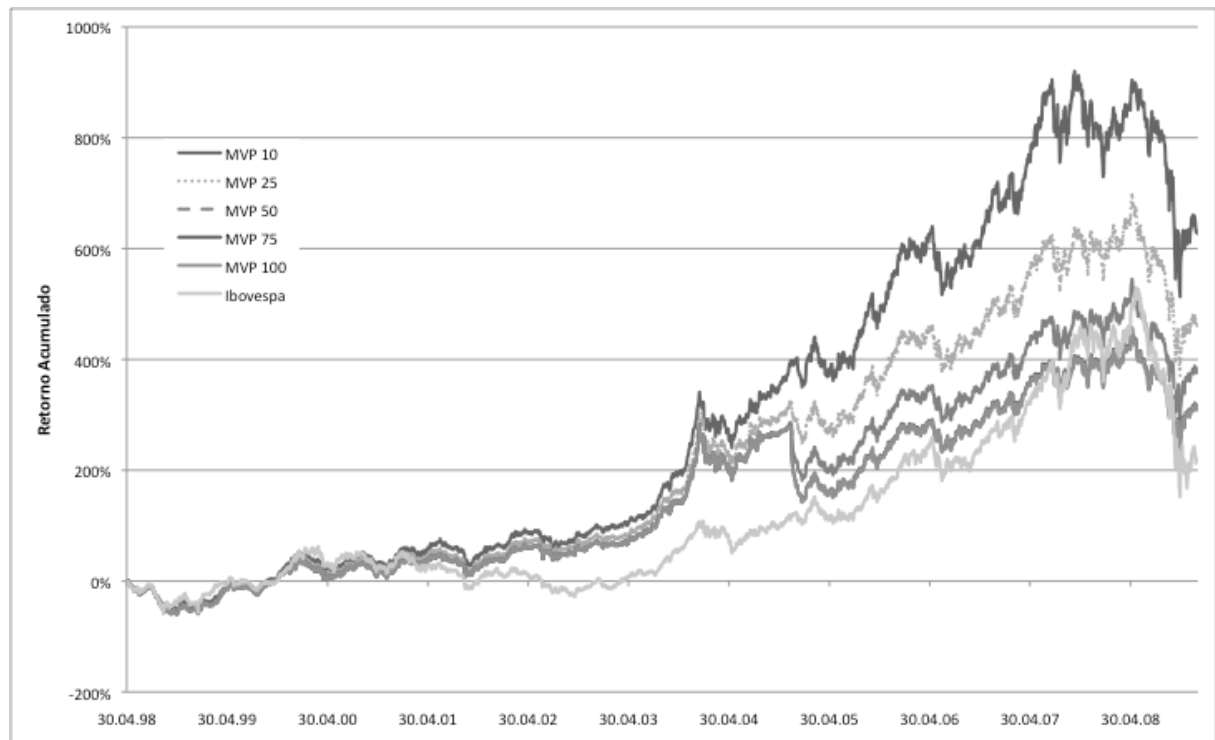


Figura 2

Risco e retorno da MVP com pesos máximos de 10%, do Ibovespa com taxa de administração de 2% ao ano, e de 29 fundos de ações de abril de 1998 a dezembro de 2008

